

Государственное образовательное учреждение
среднего профессионального образования Ярославской области
ДАНИЛОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ТЕХНИКУМ

ПРАКТИКУМ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ ЕН.01 МАТЕМАТИКА
для студентов специальности
23.02.06 Техническая эксплуатация подвижного
состава железных дорог

Данилов

2014 г.

ОДОБРЕН

цикловой
математических и общих
естественнонаучных
дисциплин

комиссией

Составлен в соответствии с ФГОС СПО по
специальности 23.02.06 Техническая
эксплуатация подвижного состава железных
дорог и рабочей программой по дисциплине
ЕН.01 Математика

Зам. директора по УР

_____/_____/

Автор: Е.Ю. Андреева, преподаватель математики ГОУ СПО ЯО Даниловского
политехнического техникума

Рецензент: Г.А. Никифорова, преподаватель математики Даниловского
политехнического техникума

Данное учебное пособие соответствует ФГОС СПО по специальности
23.02.06 Техническая эксплуатация подвижного состава железных дорог
и предназначено для практических занятий студентов очной формы
обучения

СОДЕРЖАНИЕ

Практическое занятие № 1.....	4
Практическое занятие № 2.....	6
Практическое занятие № 3.....	9
Практическое занятие № 4.....	11
Практическое занятие № 5.....	15
Практическое занятие № 6.....	18

Практическое занятие № 1

Тема занятия: Применение дифференциала при приближенных вычислениях.

Цель занятия: сформировать умение вычислять приближенные значения выражений с помощью дифференциала.

Перед началом занятия необходимо знать: формулу «полных приращений».

После окончания занятия необходимо уметь: применять дифференциал для приближенных вычислений.

Оборудование: микрокалькулятор.

Постановка задачи

1. Ознакомиться с теоретическим материалом.
2. Решить представленные задачи.

Теория

В приложениях часто полное приращение функции в точке заменяют ее полным дифференциалом в этой точке (такой процесс называют **линеаризацией**): $\Delta z \approx dz$.

Отсюда получим следующую формулу для приближенного вычисления значений функции (**формула «полных приращений»**):

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Пример 1. Вычислить приближенно $(1,9)^3(0,9)^2$.

Решение. $z = x^3 y^2$, $x_0 = 2$, $\Delta x = -0,1$, $y_0 = 1$, $\Delta y = -0,1$. Так как в точке $P_0(2,1)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{P_0} = 3x^2 y^2 \bigg|_{\substack{x_0=2 \\ y_0=1}} = 12, \quad \frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{P_0} = 2x^3 y \bigg|_{\substack{x_0=2 \\ y_0=1}} = 16, \quad \text{то} \quad dz\bigg|_{P_0} = 12 \cdot (-0,1) + 16 \cdot (-0,1) = -2,8 \quad \text{и, значит,}$$

$$(1,9)^3(0,9)^2 \approx 2^3 \cdot 1^2 + dz\bigg|_{P_0} = 8 - 2,8 = 5,2.$$

Пример 2. Даны функция $z = x^2 + y^2 + 4x - 2y$ и точка $M_1(2,94; 1,05)$. С помощью полного дифференциала вычислить приближенно значение функции в данной точке. Вычислить точное значение функции в точке M_0 и оценить относительную погрешность вычислений.

Решение. Для приближенного вычисления используем формулу «полных приращений». В данной задаче $x_0 = 3$; $\Delta x = -0,06$; $y_0 = 1$; $\Delta y = 0,05$.

$$z(x_0, y_0) = z(3,1) = 3^2 + 1^2 + 4 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 9 + 1 + 12 - 2 = 20. \quad d(z(x_0, y_0)) = z'_x(x_0, y_0)\Delta x + z'_y(x_0, y_0)\Delta y$$
$$z'_x = 2x + 4, \quad z'_x(3,1) = 2 \cdot 3 + 4 = 10; \quad z'_y = 2y - 2, \quad z'_y(3,1) = 2 \cdot 1 - 2 = 0 \quad d(z(3,1)) = 10 \cdot (-0,06) + 0 \cdot 0,05 = -0,6$$

Таким образом, приближенное значение $z(M_1) = z(2,94; 1,05) \approx 20 + (-0,6) = 19,4$.

С помощью микрокалькулятора вычислим точное значение:

$$z(M_1) = z(2,94; 1,05) = 8,6436 + 1,1025 + 11,76 - 2,1 = 19,4061.$$

Относительная

погрешность

вычислений:

$$\delta = \frac{|A_{\text{приб}} - A_{\text{точн}}|}{A_{\text{точн}}} \cdot 100\% \quad \delta = \frac{|19,4061 - 19,4|}{19,4061} \cdot 100\% \approx 0,03143\% \approx 0,03\%.$$

Решите следующие задачи:

Задача № 1

Вычислить приближенно заданную величину, используя полный дифференциал.

Вариант	1	2	3	4	5
Величина	$(1,03)^{3,001}$	$(1,09)^2(1,98)^3$	$0,9\ln(1,02)$	$(3,01)^{2,02}$	$(1,03)^{3,001}$

Вариант	6	7	8	9	10
Величина	$\frac{(2,02)^3}{(1,005)^2}$	$\sqrt[3]{8,03} \cdot \sqrt{4,02}$	$\frac{3,01^2}{1,02}$	$(4,99)^2(2,03)^3$	$(2,03)^2(3,002)^3$

Задача № 2

Дано: функция и точка. С помощью полного дифференциала вычислить приближенно значение функции в данной точке. Вычислить точное значение функции в точке M_1 и оценить относительную погрешность вычислений.

Вариант	1	2
Функция	$z = x^2 + 3xy + y^2$	$z = 2xy - 3y^2 + 5x$
Точка	$M_1 (0,98; 1,04)$	$M_1 (3,04; 2,03)$

Вариант	3	4
Функция	$z = x^2 + y^2 + 2x - 2y$	$z = x + 3xy + y^2$
Точка	$M_1 (0,94; 1,04)$	$M_1 (1,05; 1,95)$

Вариант	5	6
Функция	$z = x^2 + 2xy + y^2$	$z = x^2 - y^2 + 3x + 2y$
Точка	$M_1 (2,06; 0,98)$	$M_1 (1,02; 2,05)$

Вариант	7	8
Функция	$z = x^2 + 4xy + y^2$	$z = 3xy + 2x + 5y$
Точка	$M_1 (2,96; 0,94)$	$M_1 (1,04; 2,96)$

Вариант	9	10
Функция	$z = x^2 - 3xy + 2x$	$z = x^2 + y^2 - 2xy$
Точка	$M_1 (0,96; 2,05)$	$M_1 (0,99; 1,02)$

Практическое занятие № 2

Тема: Вычисление определителей n-го порядка.

Цель: сформировать умение вычислять определители второго, третьего и четвертого порядка.

Теоретический материал

Определение 1. Матрицей размера 2 x 2 называется совокупность чисел, расположенных в виде таблицы из 2 строк и 2 столбцов. Числа, составляющие $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ эту матрицу, называются ее элементами и обозначаются буквой с двумя индексами. Первый индекс указывает номер строки, а второй - номер столбца, в которых стоит данное число.

Определение 2. *Определителем (или детерминантом) второго порядка, соответствующим данной матрице, называется число $a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$.*

Определитель обозначают символом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{По определению,} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}.$$

Числа a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} называются элементами определителя.

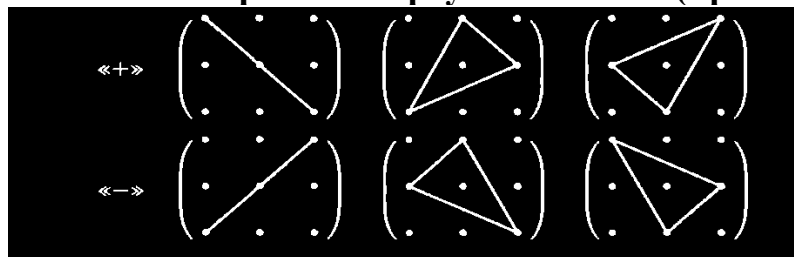
Определение 3. Аналогично, если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - \text{квадратная матрица размера } 3 \times 3$$

(3 строки, 3 столбца), то соответствующим ей определителем третьего порядка называется число, которое вычисляется следующим образом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Правило «треугольников» (правило Саррюса)



Контрольные вопросы:

1. Что называется определителем матрицы?
2. Как вычислить определитель второго порядка?
3. Какие способы вычисления определителя третьего порядка вам известны?
4. Перечислить свойства определителей.
5. Что называется минором?
6. Что называется алгебраическим дополнением элемента матрицы?
7. Как разложить определитель по элементам столбца или строки?

Задания

1. Вычислить определители второго порядка: 1) $\Delta = \begin{vmatrix} -\kappa_1 & 2+\kappa_2 \\ \kappa_1 \cdot \kappa_2 & 5 \end{vmatrix}$, 2) $\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\kappa_1}{3} & 5^2 \\ 3 \cdot \kappa_2 & 6 \end{vmatrix}$,

$$3) \Delta = \begin{vmatrix} 9^{0,5} & \kappa_1 \cdot 64^{\frac{1}{6}} \\ (0,5)^{-3} & \sqrt{4^2} \end{vmatrix}$$

2. Вычислить определители третьего порядка:

$$1) \Delta = \begin{vmatrix} -1 & 3\kappa_1 & 2 \\ 2 & 8 & \kappa_2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad 2) \Delta = \begin{vmatrix} 3\kappa_2 & 4 & -5 \\ 8 & 7\kappa_2 - 2 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}, \quad 3) \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & \kappa_1 \cdot \kappa_2 \\ 3 & \kappa_1 & -5 \\ 2 & \kappa_2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$3. \text{ Решить уравнение: } \begin{vmatrix} -1 & x \cdot \kappa_1 & 2 \\ 2 & 8 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \kappa_2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ x & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \kappa_1 & x & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & \kappa_2 \end{vmatrix},$$

<i>Вариант</i>	κ_1	κ_2	<i>Вариант</i>	κ_1	κ_2
1	3	-2	16	4	-1
2	4	1	17	5	1
3	3	-4	18	2	0
4	2	1	19	-2	1
5	3	-3	20	2	-2
6	1	5	21	0	7
7	-2	3	22	-1	4
8	6	-2	23	-3	3
9	-6	1	24	-4	1
10	-5	1	25	0	8
11	-2	4	26	4	-2
12	1	3	27	-1	3
13	-3	2	28	2	-3
14	-4	-1	29	-2	5
15	-1	5	30	-5	-1

$$4. \text{ Дан определитель: } 1) \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \kappa_1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3\kappa_2 & 2 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

1) Найти миноры и алгебраические дополнения элементов a_{i3} , a_{2j}

2) Вычислить определители, разложив их по элементам а) i -ой строки, б) j -го столбца

Вариант	κ_1	κ_2	i	j	Вариант	κ_1	κ_2	i	j
1	3	-2	1	2	16	4	-1	2	1
2	4	1	2	1	17	5	1	1	2
3	3	-4	1	3	18	2	0	3	1
4	2	1	3	4	19	-2	1	4	3
5	3	-3	4	1	20	2	-2	1	4
6	1	5	2	2	21	0	7	2	2
7	-2	3	1	4	22	-1	4	4	1
8	6	-2	4	3	23	-3	3	3	4
9	-6	1	2	1	24	-4	1	1	2
10	-5	1	1	1	25	0	8	1	1
11	-2	4	3	2	26	4	-2	2	3
12	1	3	4	3	27	-1	3	3	4
13	-3	2	2	4	28	2	-3	4	2
14	-4	-1	1	2	29	-2	5	2	1
15	-1	5	3	1	30	-5	-1	1	3

Практическое занятие № 3

Тема: Решение систем n линейных уравнений с n неизвестными.

Цель: сформировать умение решать системы линейных уравнений по правилу Крамера, с помощью обратной матрицы (матричным методом), методом Гаусса.

Задание:

1. Решите системы уравнений:

а) по формуле Крамера;

б) с помощью обратной матрицы (матричным методом);

в) Методом Гаусса.

1.1. $\begin{cases} 2x + y + 3z = 7, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ 3x + 2y + z = 6. \end{cases}$ 1.2. $\begin{cases} 2x - y + 2z = 3, \\ x + y + 2z = -4, \\ 4x + y + 4z = -3. \end{cases}$ 1.3. $\begin{cases} 3x - y + z = 12, \\ x + 2y + 4z = 6, \\ 5x + y + 2z = 3. \end{cases}$ 1.4. $\begin{cases} 2x - y + 3z = -4, \\ x + 3y + 3z = 11, \\ x - 2y + 2z = -7. \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 12, \\ 3x + 4y - 2z = 6, \\ 2x - y - z = -9. \end{cases}$ 1.6. $\begin{cases} 8x + 3y - 6z = -4, \\ x + y - z = 2, \\ 4x + y - 3z = -5. \end{cases}$ 1.7. $\begin{cases} 4x + y - 3z = 9, \\ x + y - z = -2, \\ 8x + 3y - 6z = 12. \end{cases}$ 1.8. $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 33, \\ 7x - 5y = 24, \\ 4x + 11z = 39. \end{cases}$

1.9. $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 12, \\ 7x - 5y + z = -33, \\ 4x + z = -7. \end{cases}$ 1.10. $\begin{cases} x + 4y - z = 6, \\ 5y + 4z = -20, \\ 3x - 2y + 5z = -22. \end{cases}$ 1.11. $\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 21, \\ 3x + 4y - 2z = 9, \\ 2x - y - z = 10. \end{cases}$ 1.12. $\begin{cases} 3x - 2y - 5z = 5, \\ 2x + 3y - 4z = 12, \\ x - 2y + 3z = -1. \end{cases}$

1.13. $\begin{cases} 4x + y + 4z = 19, \\ 2x - y + 2z = 11, \\ x + y + 2z = 8. \end{cases}$ 1.14. $\begin{cases} 2x - y + 2z = 0, \\ 4x + y + 4z = 6, \\ x + y + 2z = 4. \end{cases}$ 1.15. $\begin{cases} 2x - y + 2z = 8, \\ x + y + 2z = 11, \\ 4x + y + 4z = 22. \end{cases}$ 1.16. $\begin{cases} 2x - y - 3z = -9, \\ x + 5y + z = 20, \\ 3x + 4y + 2z = 15. \end{cases}$

1.17. $\begin{cases} 2x - y - 3z = 0, \\ 3x + 4y + 2z = 1, \\ x + 5y + z = -3. \end{cases}$ 1.18. $\begin{cases} -3x + 5y + 6z = -8, \\ 3x + y + z = -4, \\ x - 4y - 2z = -9. \end{cases}$ 1.19. $\begin{cases} 3x + y + z = -4, \\ -3x + 5y + 6z = 36, \\ x - 4y - 2z = 19. \end{cases}$ 1.20. $\begin{cases} 3x - y + z = -11, \\ 5x + y + 2z = 8, \\ x + 2y + 4z = 16. \end{cases}$

1.21. $\begin{cases} 3x - y + z = 9, \\ 5x + y + 2z = 11, \\ x + 2y + 4z = 19. \end{cases}$ 1.22. $\begin{cases} 2x + 3y + z = 4, \\ 2x + y + 3z = 0, \\ 3x + 2y + z = 1. \end{cases}$ 1.23. $\begin{cases} 2x + 3y + z = 12, \\ 2x + y + 3z = 16, \\ 3x + 2y + z = 8. \end{cases}$ 1.24. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 14, \\ 2x + 3y - 4z = -16, \\ 3x - 2y - 5z = -8. \end{cases}$

1.25. $\begin{cases} 3x + 4y - 2z = 11, \\ 2x - y - z = 4, \\ 3x - 2y + 4z = 11. \end{cases}$ 1.26. $\begin{cases} x + 5y - 6z = -15, \\ 3x + y + 4z = 13, \\ 2x - 3y + z = 9. \end{cases}$ 1.27. $\begin{cases} 4x - y = -6, \\ 3x + 2y + 5z = -14, \\ x - 3y + 4z = -19. \end{cases}$ 1.28. $\begin{cases} 5x + 2y - 4z = -16, \\ x + 3z = -6, \\ 2x - 3y + z = 9. \end{cases}$

1.29. $\begin{cases} x + 4y - z = -9, \\ 4x - y + 5z = -2, \\ 3y - 7z = -6. \end{cases}$ 1.30. $\begin{cases} 7x + 4y - z = 13, \\ 3x + 2y + 3z = 3, \\ 2x - 3y + z = -10. \end{cases}$

2. Решите однородную систему линейных алгебраических уравнений.

$$\begin{array}{ll}
 3.1. \begin{cases} x + y + z = 0, \\ 2x - 3y + 4z = 0, \\ 4x - 11y + 10z = 0. \end{cases} & 3.2. \begin{cases} 3x - y + 2z = 0, \\ x + y + z = 0, \\ x + 3y + 3z = 0. \end{cases} & 3.3. \begin{cases} x + 3y + 2z = 0, \\ 2x - y + 3z = 0, \\ 3x - 5y + 4z = 0. \end{cases} & 3.4. \begin{cases} 4x - y + 10z = 0, \\ x + 2y - z = 0, \\ 2x - 3y + 4z = 0. \end{cases} \\
 3.5. \begin{cases} 2x + 5y + z = 0, \\ 4x + 6y + 3z = 0, \\ x - y - 2z = 0. \end{cases} & 3.6. \begin{cases} 3x - y - 3z = 0, \\ 2x + 3y + z = 0, \\ x + y + 3z = 0. \end{cases} & 3.7. \begin{cases} x - y + 2z = 0, \\ 2x + y - 3z = 0, \\ 3x + 2z = 0. \end{cases} & 3.8. \begin{cases} 2x - y - 5z = 0, \\ x + 2y - 3z = 0, \\ 5x + y + 4z = 0. \end{cases} \\
 3.9. \begin{cases} 5x - 5y + 4z = 0, \\ 3x + y + 3z = 0, \\ x + 7y - z = 0. \end{cases} & 3.10. \begin{cases} x + 3y - z = 0, \\ 2x + 5y - 2z = 0, \\ x + y + 5z = 0. \end{cases} & 3.11. \begin{cases} 2x + y + 3z = 0, \\ 3x - y + 2z = 0, \\ x + 3y + 4z = 0. \end{cases} & 3.12. \begin{cases} x - 2y - z = 0, \\ 2x + 3y + 2z = 0, \\ 3x - 2y + 5z = 0. \end{cases} \\
 3.13. \begin{cases} 2x + y - z = 0, \\ 3x - 2y + 4z = 0, \\ x - 5y + 3z = 0. \end{cases} & 3.14. \begin{cases} 4x + y + 3z = 0, \\ 8x - y + 7z = 0, \\ 2x + 4y - 5z = 0. \end{cases} & 3.15. \begin{cases} x + 4y - 3z = 0, \\ 2x + 5y + z = 0, \\ x - 7y + 2z = 0. \end{cases} & 3.16. \begin{cases} x - 2y + z = 0, \\ 3x + y + 2z = 0, \\ 2x - 3y + 5z = 0. \end{cases} \\
 3.17. \begin{cases} x + 2y + 3z = 0, \\ 2x - y - z = 0, \\ 3x + 3y + 2z = 0. \end{cases} & 3.18. \begin{cases} 3x + 2y = 0, \\ x - y + 2z = 0, \\ 4x - 2y + 5z = 0. \end{cases} & 3.19. \begin{cases} 2x - y + 3z = 0, \\ x + 2y - 5z = 0, \\ 3x + y + z = 0. \end{cases} & 3.20. \begin{cases} 3x + 2y - z = 0, \\ 2x - y + 3z = 0, \\ 4x + 3y + 4z = 0. \end{cases} \\
 3.21. \begin{cases} x - 3y - 4z = 0, \\ 5x - 8y - 2z = 0, \\ 2x + y - z = 0. \end{cases} & 3.22. \begin{cases} 3x + 5y - z = 0, \\ 2x + 4y - 3z = 0, \\ x - 3y + z = 0. \end{cases} & 3.23. \begin{cases} 3x - 2y + z = 0, \\ 2x - 3y + 2z = 0, \\ 4x + y - 4z = 0. \end{cases} & 3.24. \begin{cases} 7x + y - 3z = 0, \\ 3x - 2y + 3z = 0, \\ x - y + 2z = 0. \end{cases} \\
 3.25. \begin{cases} x + 2y - 4z = 0, \\ 2x - y - 3z = 0, \\ x + 3y + z = 0. \end{cases} & 3.26. \begin{cases} 7x - 6y + z = 0, \\ 4x + 5y = 0, \\ x - 2y + 3z = 0. \end{cases} & 3.27. \begin{cases} 5x - 4y + 2z = 0, \\ 3x - 2y = 0, \\ 4x + y - 3z = 0. \end{cases} & 3.28. \begin{cases} 6x + 5y - 4z = 0, \\ x + y - z = 0, \\ 3x + 4y + 3z = 0. \end{cases} \\
 3.29. \begin{cases} 8x + y - 3z = 0, \\ x - 5y + z = 0, \\ 4x - 7y + 2z = 0. \end{cases} & 3.30. \begin{cases} x + 7y - 3z = 0, \\ 3x - 5y + z = 0, \\ 3x + 4y - 2z = 0. \end{cases}
 \end{array}$$

Практическое занятие № 4

Тема занятия: Численное дифференцирование.

Цель занятия: сформировать умение вычислять значение производной функции в точке, заданной таблично, с помощью интерполяционных формул Ньютона.

Перед началом занятия необходимо знать: интерполяционную формулу Ньютона, порядок составления таблицы конечных разностей для функции заданной таблицей.

После окончания занятия необходимо уметь: вычислять значение производной функции в указанной точке, заданной таблицей.

Оборудование: микрокалькулятор.

Постановка задачи

1. Ознакомиться с теоретическим материалом.
2. Решить представленные задачи.

Теория

Когда производную функции, заданной аналитически, использовать затруднительно, или выражение для производной неудобно для применения, используют приближенное или численное дифференцирование. Этот метод необходим, если исходная функция задана таблично. Один из способов численного дифференцирования – использование интерполяционных многочленов.

Пусть функция задана таблицей

x	x_0	x_1	x_2	...	x_n
f(x)	y_0	y_1	y_2	...	y_n

Надо найти значение $f'(x)$ в точке, не совпадающей ни с одним значением в таблице. Поступают так: по исходной таблице строят функцию $F(x)$, которая близка к $f(x)$ и формулой, которой можно воспользоваться для вычислений, считая приближенно, что $f(x) \approx F(x)$. $F(x)$ – приближающая функция. Нахождение приближающей функции $F(x)$ называется интерполяцией, а точки $x_0, x_1, x_2 \dots x_n$ – узлами интерполяции. Если интерполирование ведется для функций, заданных таблицами с равноотстоящими значениями аргумента, то $x_n - x_{n-1} = h$ – шаг таблицы, $h = const$.

Разности между значениями в соседних узлах интерполяции называются конечными разностями первого порядка $\Delta y = y_n - y_{n-1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Из конечных разностей первого порядка образуются конечные разности второго порядка $\Delta^2 y$. Продолжая этот процесс можно составить таблицу конечных разностей для функции $f(x)$.

Если функция $f(x)$ задана таблицей и для нее составлена таблица конечных разностей, то значение производной в точке находят по формуле:

$$f'(x_0) = F'(x_0) = \frac{1}{h} (\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} - \frac{\Delta^4 y_0}{4} + \frac{\Delta^5 y_0}{5} - \dots)$$

Эта формула позволяет легко и достаточно точно получать значение производных функций, заданных таблично, в указанной точке.

Пример: Найти значение производной функции в точке $x_0=32$, если функция задана таблицей

x	32	33	34	35	36
y	5,657	5,745	5,831	5,916	6,000

Решение:

1. Находим шаг таблицы: $33-32=34-33=35-34=36-35=1$, $h=1$

2. Составим таблицу конечных разностей:

$$(\Delta y = 5,745 - 5,657 = 0,088 \text{ и т.д. } \Delta^2 y = 0,086 - 0,088 = -0,002$$

$$\text{и т.д. } \Delta^3 y = -0,001 - (-0,002) = 0,001 \text{ и т.д.})$$

X	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
$x_0=32$	5,657	0,088	-0,002	0,001	-0,001
$x_1=33$	5,745	0,086	-0,001	0	
$x_2=34$	5,831	0,085	-0,001		
$x_3=35$	5,916	0,084			
$x_4=36$	6,000				

$$y'(32) = \frac{1}{1}(0,088 - \frac{(-0,002)}{2} + \frac{0,001}{3} - \frac{(-0,001)}{4}) = 0,088 + 0,001 + \frac{0,001}{3} + \frac{0,001}{4} = 0,0895. \text{ Ответ : } y'(32) = 0,0895$$

Решите следующие задачи:

Задача № 1

1. Составить таблицу конечных разностей для функции заданной таблицей.

Задача № 2

Используя интерполяционный многочлен Ньютона, вычислите значение производной функции, заданной таблично, в x_0 .

Вариант 1

Задача № 1

x	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4
y	3,142	3,464	3,801	4,155	4,524

Задача № 2

$x_0=3,1$

x	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5
y	9,61	10,24	10,89	11,56	12,25

Вариант 2

Задача № 1

x	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
y	0,3173	0,6065	0,8013	0,9098	0,9626

Задача № 2

$x_0=0,1$

x	0,10	0,11	0,12	0,13	0,14
y	1,105	1,116	1,127	1,139	1,150

Вариант 3**Задача № 1**

x	0,25	0,26	0,27	0,28	0,29
y	1,284	1,297	1,312	1,323	1,336

Задача № 2

$x_0=0,15$

x	0,15	0,16	0,17	0,18	0,19
y	0,8607	0,8521	0,8437	0,8353	0,8270

Вариант 4**Задача № 1**

x	0,32	0,33	0,34	0,35	0,36
y	1,377	1,391	1,406	1,419	1,433

Задача № 2

$x_0=0,57$

x	0,57	0,58	0,59	0,60	0,61
y	0,5655	0,5599	0,5543	0,5488	0,5434

Вариант 5**Задача № 1**

x	6,4	6,5	6,6	6,7	6,8
y	0,1991	0,3062	0,4232	0,5398	0,6472

Задача № 2

$x_0=1,25$

x	1,25	1,26	1,27	1,28	1,29
y	1,602	1,621	1,640	1,659	1,679

Вариант 6**Задача № 1**

x	1,31	1,32	1,33	1,34	1,35
y	1,988	2,005	2,023	2,040	2,058

Задача № 2

$x_0=1,53$

x	1,53	1,54	1,55	1,56	1,57
y	0,9104	0,9121	0,9138	0,9154	0,9170

Вариант 7**Задача № 1**

x	0,68	0,69	0,70	0,71	0,72
y	0,7336	0,7461	0,7586	0,7712	0,7838

Задача № 2

$x_0=0,4$

x	0,40	0,41	0,42	0,43	0,44
y	1,081	1,085	1,090	1,094	1,098

Вариант 8

Задача № 1

x	0,19	0,20	0,21	0,22	0,23
y	0,1878	0,1973	0,2070	0,2165	0,2260

Задача № 2

$x_0=0,05$

x	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
y	0,0500	0,0600	0,0701	0,0801	0,0901

Вариант 9

Задача № 1

x	0,18	0,19	0,20	0,21	0,22
y	0,1810	0,1912	0,2013	0,2116	0,2218

Задача № 2

$x_0=0,31$

x	0,31	0,32	0,33	0,34	0,35
y	0,3004	0,3095	0,3185	0,3275	0,3364

Вариант 10

Задача № 1

x	1,10	1,11	1,12	1,13	1,14
y	1,669	1,682	1,696	1,709	1,723

Задача № 2

$x_0=0,4$

x	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
y	1,767	2,011	2,270	2,545	2,835

Практическое занятие № 5

Тема занятия: Вычисление определенного интеграла по формулам прямоугольников и трапеций.

Цель занятия: сформировать умение вычислять определенные интегралы по формулам приближенного интегрирования: методом прямоугольников и методом трапеций.

Перед началом занятия необходимо знать: формулу прямоугольников и формулу трапеций, формулу вычисления погрешности приближения.

После окончания занятия необходимо уметь: вычислять определенные интегралы по формуле прямоугольников и формуле трапеций, вычислять погрешность приближения.

Оборудование: микрокалькулятор, таблицы Брадиса.

Постановка задачи

1. Ознакомиться с теоретическим материалом.
2. Решить представленные задачи.

Теория

Не для всякой непрерывной функции ее первообразная выражается через элементарные функции. Кроме того, на практике сталкиваются с необходимостью вычислить интегралы от функций, заданных табличным или графическим способом, а также интегралы от функций, первообразные которых выражаются через элементарные функции очень сложно, что требует большой вычислительной работы и с практической точки зрения не рационально. В этих случаях вычисление определенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница либо невозможно, либо затруднительно, поэтому прибегают к различным методам *приближенного* интегрирования. В основе приближенных методов интегрирования лежит геометрический смысл определенного интеграла. А

именно: определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$, $f(x) \geq 0$ на $[a;b]$, $a < b$ численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f(x)$, осью OX и прямыми $x=a$ и $x=b$.

Кривая $y=f(x)$ заменяется более простой кривой и площадь полученной таким образом криволинейной трапеции принимается за приближенное значение определенного интеграла. Наиболее простые формулы приближенного интегрирования: формула прямоугольников и формула трапеций.

Метод прямоугольников.

При этом способе подынтегральная функция f заменяется ступенчатой функцией, которая на каждом из отрезков $[x_{i-1}; x_i]$ имеет постоянное значение, равное значению функции f на одном из концов отрезка. Тогда площадь криволинейной трапеции $aABb$, а следовательно, и значение искомого интеграла, приближенно равна сумме площадей прямоугольников с высотами

y_{i-1} и основаниями $h = \frac{b-a}{n}$:

$$\int_a^b f(x)dx = y_1 h + y_2 h + \dots + y_n h = h(y_1 + y_2 + \dots + y_n);$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n) - \text{формула прямоугольников.}$$

Метод трапеций

При вычислении интеграла $\int_a^b f(x)dx$ с помощью метода трапеций, подынтегральная функция заменяется функцией, график которой представляет ломаную линию. В этом случае площадь криволинейной трапеции $aABb$, а, следовательно, значение искомого интеграла, приближенно равно сумме площадей трапеций с основаниями y_{i-1} и y_i и высотой $h = \frac{b-a}{n}$.

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{y_0 + y_1}{2}h + \frac{y_1 + y_2}{2}h + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}h = h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + \frac{y_n}{2}\right)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right) - \text{формула трапеций.}$$

Хотя с помощью приближенного интегрирования обычно находят интегралы, не поддающиеся точному вычислению, ограничимся решением примеров, где точное значение находится легко для того, чтобы сравнить полученное приближение с точным значением.

Пример 1. Используя метод прямоугольников, вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx$.

Решение. Разобьем промежуток $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ на 5 частей. Тогда $n=5$, $a=0$, $b=$

$$\frac{\pi}{4}, h = \frac{b-a}{n} = \frac{\frac{\pi}{4} - 0}{5} = \frac{\pi}{20} = 0,1571.$$

Найдем значение функции по таблицам Брадиса:

x	0,1571	0,3542	0,4713	0,6284	0,7855
y=cosx	0,9877	0,9511	0,8910	0,8090	0,7071

По формуле прямоугольников имеем: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx = 0,1571(0,9877 + 0,9511 +$
 $+ 0,8910 + 0,8090 + 0,7071) = 0,1571 \cdot 4,3459 = 0,6827.$

Точное значение $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \sin \frac{\pi}{4} - \sin 0 = 0,7071.$

Погрешность приближения: $\delta = \frac{|A_{\text{приб}} - A_{\text{точн}}|}{A_{\text{точн}}} 100\%$

$$\delta = \frac{|0,6827 - 0,7071|}{0,7071} 100\% = \frac{|-0,0244|}{0,7071} 100\% = 3,45\%.$$

Пример 2. Найти $\int_0^4 x^2 dx$ методом трапеций, разделив промежуток интегрирования на 10 равных частей. Найти погрешность приближения.

Решение. Здесь $n=10$, тогда $h = \frac{4-0}{10} = 0,4$

x	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2	2,4	2,8	3,2	3,6	4
y=x ²	0	0,16	0,64	1,44	2,56	4	5,76	7,84	10,24	12,96	16

$$\int_0^4 x^2 dx = 0,4 \left(\frac{0}{2} + 0,16 + 0,64 + 1,44 + 2,56 + 4 + 5,76 + 7,84 + 10,24 + 12,96 + \frac{16}{2} \right) \text{ Точное значение}$$

$$= 21,44$$

$$\int_0^4 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^4 = \frac{64}{3} = 21,33 \text{ . Погрешность приближения}$$

$$\delta = \frac{|21,44 - 21,33|}{21,33} 100\% \approx 0,5\% .$$

Очевидно, что с увеличением числа n точек деления отрезка $[a; b]$ увеличивается точность значения искомого интеграла, вычисленного по любой из формул. Однако при одном и том же значении n формула трапеций дает лучшее приближение, чем формула прямоугольников.

Решите следующие задачи:

Вычислить определенный интеграл тремя способами:

1. точно с помощью формулы Ньютона-Лейбница;
2. приближенно по формуле прямоугольников, считая $n=10$;
3. приближенно по формуле трапеций, считая $n=10$;
4. найти погрешность приближения.

Вариант	1	2	3	4	5
Интеграл	$\int_1^{11} \frac{dx}{x}$	$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$	$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$	$\int_{-1}^2 (x^2 + 1) dx$

Вариант	6	7	8	9	10
Интеграл	$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$	$\int_1^3 (4x - x^2) dx$	$\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$	$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$	$\int_{-1}^2 (2x^2 + 1) dx$

Практическое занятие № 6

Тема занятия: Использование метода Эйлера для численного решения дифференциальных уравнений.

Цель занятия: сформировать умение применять приближенные, численные методы для нахождения частного решения дифференциального уравнения.

Перед началом занятия необходимо знать: численный метод решения дифференциальных уравнений – метод Эйлера.

После окончания занятия необходимо уметь: находить приближенное решение дифференциального уравнения с помощью метода Эйлера.

Оборудование: микрокалькулятор.

Постановка задачи

1. Ознакомиться с теоретическим материалом.
2. Решить представленные задачи.

Теория

Если проинтегрировать дифференциальное уравнение не удастся или общее решение очень сложно. То для нахождения частного решения уравнения применяют приближенные, численные методы решения. Рассмотрим численный метод решения дифференциальных уравнений – метод Эйлера. Приближенное решение ищут на интервале $[x_0; b]$, который обязательно входит в интервал существования точного решения. Надо найти частное решение уравнения $y' = f(x, y)$, если $y_0 = f(x_0)$. Интервал $[x_0; b]$ делим на n равных частей $h = \frac{b - x_0}{n}$ - шаг интегрирования, y_0 - задано, $y_1 = y_0 + \Delta y$, Δy находим, используя геометрический смысл производной:

$$\Delta y = h \cdot \operatorname{tg} \alpha = h \cdot y'(x_0) = h \cdot f(x_0, y_0).$$

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$$

$$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1)$$

$$y_3 = y_2 + h \cdot f(x_2, y_2)$$

.....

$$y_k = y_{k-1} + h \cdot f(x_{k-1}, y_{k-1})$$

Функцию, заданную таблицей

x_k	x_1	x_2	x_3	...	x_n
y_k	y_1	y_2	y_3	...	y_n

у которой y_k вычисляется по формуле $y_k = y_{k-1} + h \cdot f(x_{k-1}, y_{k-1})$,

$k=1, 2, 3, \dots, n$ называют приближенным решением начальной задачи по методу Эйлера.

Пример. Найти четыре значения функции y , определяемой уравнением $y' = 1 + x + y^2$, если $y(0)=1$, $h=0,1$.

$$x_0 = 0; y_0 = 1;$$

$$x_1 = 0 + 0,1 = 0,1;$$

$$y_1 = y_0 + h \cdot (1 + x_0 + y_0^2) = 1 + 0,1(1 + 0 + 1) = 1,2;$$

$$x_2 = 0,1 + 0,1 = 0,2;$$

Решение: $y_2 = y_1 + h \cdot (1 + x_1 + y_1^2) = 1,2 + 0,1(1 + 0,1 + 1,2^2) = 1,454;$

$$x_3 = 0,2 + 0,1 = 0,3;$$

$$y_3 = y_2 + h \cdot (1 + x_2 + y_2^2) = 1,454 + 0,1(1 + 0,1 + 1,454^2) = 1,78;$$

$$x_4 = 0,3 + 0,1 = 0,4;$$

$$y_4 = y_3 + h \cdot (1 + x_3 + y_3^2) = 1,78 + 0,1(1 + 0,1 + 1,78^2) = 2,23.$$

Ответ:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4
y	1	1,2	1,454	1,78	2,23

Решите следующие задачи:

Задача. По методу Эйлера найдите 5 значений функции y .

Вариант 1

а) $y' = \frac{y-x}{y+x} \quad y(0) = 1 \quad h = 0,1;$

б) $y' = y + x \quad y(0) = 0 \quad h = 0,1;$

в) $y' = y + x^2 \quad y(1) = 3 \quad h = 0,3.$

Вариант 2

а) $y' = y^2 + \frac{y}{x} \quad y(2) = 4 \quad h = 0,1;$ б) $y' = y - \frac{2x}{y} \quad y(0) = 1 \quad h = 0,2;$

в) $y' = \frac{x^2}{y} + y^2 \quad y(1) = 2 \quad h = 0,3.$

Вариант 3

а) $y' = \frac{2y}{x} - x \quad y(1) = 2 \quad h = 0,1;$

б) $y' = \frac{x}{y} + 0,5y \quad y(0) = 1 \quad h = 0,1.$

в) $y' = y + x \quad y(0) = 1 \quad h = 0,3.$

Вариант 4

а) $y' = \frac{(x+y)(1-xy)}{x+2y} \quad y(0) = 1 \quad h = 0,2;$

б) $y' = \frac{3}{x^2} + \frac{y}{2x} \quad y(1) = 0 \quad h = 0,1;$

в) $y' = x^2 - y^2 \quad y(1) = 1 \quad h = 0,3.$

Вариант 5

а) $y' = \frac{y^2}{4} + x^2$ $y(0) = 1$ $h = 0,2$;

б) $y' = x - \frac{2y}{x}$ $y(1) = 0$ $h = 0,1$;

в) $y' = \frac{x-y}{y+x} + y^2$ $y(0) = 1$ $h = 0,3$.

Вариант 6

а) $y' = y^2 - \frac{y}{x}$ $y(1) = 3$ $h = 0,1$;

б) $y' = \frac{1}{x^2} + \frac{y}{x}$ $y(1) = 0$ $h = 0,2$;

в) $y' = x^2 - y^2$ $y(1) = 1$ $h = 0,3$.

Вариант 7

а) $y' = \frac{2x}{y} - y$ $y(2) = 4$ $h = 0,1$;

б) $y' = \frac{x}{y} + 0,5x$ $y(1) = 2$ $h = 0,2$.

в) $y' = \frac{1}{x^2} + \frac{y}{x}$ $y(1) = 0$ $h = 0,3$.

Вариант 8

а) $y' = \frac{(x+y)(1-x)}{x-y}$ $y(0) = 1$ $h = 0,1$;

б) $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{3}$ $y(1) = 2$ $h = 0,2$;

в) $y' = x^2 - y^2$ $y(1) = 1$ $h = 0,3$.

Вариант 9

а) $y' = \frac{3x}{y} - x$ $y(0) = 2$ $h = 0,1$;

б) $y' = \frac{2x}{y} + \frac{y}{2}$ $y(2) = 1$ $h = 0,2$;

в) $y' = y + x$ $y(0) = 1$ $h = 0,3$.

Вариант 10

а) $y' = x^2 - y^2$ $y(1) = 1$ $h = 0,2$;

б) $y' = \frac{y+x}{x-y} + y^2$ $y(1) = 2$ $h = 0,1$;

в) $y' = \frac{x}{y} + 0,5y$ $y(0) = 1$ $h = 0,3$.